



TITLE:

固体の熱膨張とソリトン(II.物性,ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告)

AUTHOR(S):

宗像, 豊哲

---

CITATION:

宗像, 豊哲. 固体の熱膨張とソリトン(II.物性,ソリトン系のダイナミクスとそれに関するカオスの問題,基研長期研究会報告). 物性研究 1984, 42(3): 427-431

ISSUE DATE:

1984-06-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/91381>

RIGHT:

# References

- 1) A. Matsuda and T. Kawakami, Phys. Rev. Lett. **51**, 694 (1983)
- 2) A. Matsuda and S. Uehara, Appl. Phys. Lett. **41**, 770 (1982)
- 3) Halbritter, Z. Phys. **238**, 466 (1970)
- 4) J. Nitta, A. Matsuda and T. Kawakami, J. Appl. Phys. to be published in April issue (1984)
- 5) D. N. McLaughlin and A. C. Scott, Phys. Rev. **A18**, 1652 (1978)
- 6) J. Nitta, A. Matsuda and T. Kawakami, Appl. Phys. Lett. to be published
- 7) 松田, 川上 物理学会秋の分科会予稿集 13 p-C-2 275 (1983)

## 固体の熱膨張とソリトン

京大・工 宗 像 豊 哲

従来固体の熱膨張は系の自由エネルギー  $F(T, V)$  を温度  $T$  と体積  $V$  の関数として求め状態方程式  $P = -\partial F / \partial V$  に基づいて議論されてきた。我々は熱膨張の動的側面を考察し、非線形格子波の変調と熱膨張の密接な関係を明示した。

### A. Modulation と averaged Lagrangian

次の Hamiltonian  $\mathcal{H}$  をもつ一次元格子系を考える。

$$\mathcal{H} = \frac{M}{2} \sum_n \dot{u}_n^2 + f \sum_n \left[ r_n^2 / 2 - p r_n^3 / 3 h_0 + q r_n^4 / 4 h_0^2 \right], \quad r_n = u_n - u_{n-1} \quad (1)$$

ここに  $u_n$  は  $n$ -th atom の平衡位置からの変位であり、 $p > 0$ ,  $q > 0$  は非線形性を規定するパラメータである。変調の問題を考える為に  $u_n$  を

$$u_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m e^{im\theta}, \quad \theta = knh_0 - \omega(k)t, \quad (2)$$

$$\omega(k) = 2\sqrt{f/M} \sin\left(\frac{kh_0}{2}\right)$$

と展開する。(  $h_0; T=0$  での格子間隔) 次の3つの仮定

① 基本モードの振巾  $\psi_{\pm 1}$  は order  $\varepsilon$  ( $\ll 1$ )

②  $\psi_m$  は slowly varying;

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim \frac{\partial}{\partial t} \sim O(\varepsilon)$$

③  $\psi_m (m \neq \pm 1)$  は  $\psi_{\pm 1}$  により断熱的にきまる。

の下に(2)をLagrangian 及び(1)に代入することにより, 系の averaged Lagrangian 及び Hamiltonian  $\bar{\mathcal{L}}$  及び  $\bar{\mathcal{H}}$  を  $\psi_m$  の functional として書き下す事が出来る。但し

$$\bar{A}(x, t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta A(x, t; \theta)。$$

$\varepsilon$  の lowest order で次の変分方程式を  $\bar{\mathcal{L}}$  から得る。

$$\psi_{0,xx} = \frac{8p}{h_0^2} \sin^2\left(\frac{kh_0}{2}\right) |\psi_1|^2, \text{ 但し } \psi_{,x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & -\psi_{1,tt} + 2i\omega(k)\psi_{1,t} + 2ih_0(f/M)\sin(kh_0)\psi_{1,x} \\ & + (f/M)h_0^2\cos(kh_0)\psi_{1,xx} + 2p\omega^2(k)\psi_1\psi_{0,x} \\ & - 4ip\sin(kh_0)\omega^2(k)\psi_{-1}\psi_2/h_0 \\ & - 12q\omega^2(k)\sin^2(kh_0/2)\psi_1^2\psi_{-1}/h_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\psi_2 = -(ip/h_0)\cot(kh_0/2)\psi_1^2 \quad (5)$$

$$\psi_m = 0 \quad (|m| \geq 3) \quad (6)$$

自由端の境界条件より(3)は

$$\psi_{0,x} = \frac{8p}{h_0^2} \sin^2\left(\frac{kh_0}{2}\right) |\psi_1|^2 \quad (3)'$$

となる。座標系

$$\xi = x - \lambda t \quad \left( \lambda = \frac{d\omega}{dk} = \text{group velocity} \right), t$$

に移行すると(3)~(6)は nonlinear Schrödinger 方程式

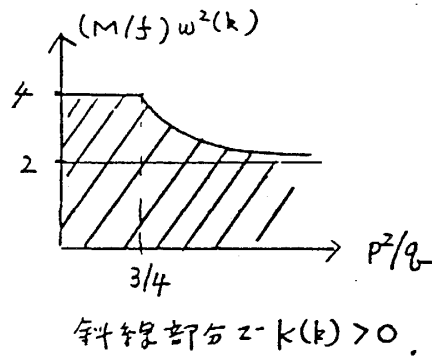
$$i \psi_{1,t} + \frac{\omega''}{2} \psi_{1,\xi\xi} + Q(k) |\psi_1|^2 \psi_1 = 0 \quad (7)$$

に帰着する。但し

$$Q(k) = -2 \left[ 2p^2 \left( 1 - 3 \sin^2 \left( \frac{k h_0}{2} \right) \right) + 3q \sin^2 \left( \frac{k h_0}{2} \right) \right] \omega(k) / h_0^2$$

$$\equiv -\omega(k) K(k)$$

$K(k) > 0$  の領域で NLS eq. (7) はソリトン解をもつことが知られている。(下図参照)



#### B. Envelope ソリトンと熱膨張

NLS eq. (7) の one-soliton 解  $\psi_1^{\text{sol}}$  は次の形をもつ。

$$\psi_1^{\text{sol}} = A \operatorname{sech} \{ A \tilde{Q}(k) (\xi - \xi_0) \} e^{i A^2 |Q(k)| t / 2} \quad (8)$$

但し

$$\tilde{Q}(k) \equiv \sqrt{Q(k) / \omega''(k)}.$$

(8) で表わされる励起に対応するエネルギー  $E^{\text{sol}}(A)$  と lattice の伸び  $\Gamma^{\text{sol}}(A)$  は次式で与えられる。

$$E^{\text{sol}}(A) = [4f|A|/h_0 \tilde{Q}(k)] \times [4 \sin^2 \left( \frac{k h_0}{2} \right) + g(k) |A|^2] \quad (9)$$

但し,  $g(k)$  は  $p, q, k$  の函数。

$$\Gamma^{\text{sol}}(A) \equiv \int \psi_{0,x}^{\text{sol}} dx = 16 p \sin^2 \left( \frac{k h_0}{2} \right) |A| / [h_0^2 \tilde{Q}(k)] \quad (10)$$

宗像豊哲

次の手順に従って熱膨張率  $\delta$  を求める。

- ① first Brillouin zone を巾  $\varepsilon$  の segment  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 2\pi/h_0\varepsilon$ ) に分ける。各  $k_i$  は

$$\varepsilon/(2\pi/L) = \frac{\varepsilon L}{2\pi}$$

ヶの自由度を持つ。但し  $L$  は  $T=0$  での格子長さ。この自由度は又、各々  $2\pi/\varepsilon$  程度の空間的広がりを持った  $\varepsilon L/2\pi$  ヶのソリトンが格子上に分布すると解釈する事が出来る。

- ② 各 segment  $k_i$  からの熱膨張への寄与  $\Delta L(k_i)$  は

$$\Delta L(k_i) = \frac{\varepsilon L}{2\pi} \langle \Gamma^{\text{sol}}(A_{k_i}) \rangle$$

で求める。

- ③ total expansion は

$$\Delta L = \sum_{k_i} \Delta L(k_i) = \varepsilon^{-1} \int_{\text{FBZ}} dk \Delta L(k_i) \equiv L \delta$$

- ④ thermal average  $\langle \rangle$  は

$$\langle f(A_k) \rangle \equiv \frac{1}{k_B T} \int_0^\infty dE^{\text{sol}} f(A_k) e^{-E^{\text{sol}}/k_B T} \quad (f \text{ は任意の関数})$$

で定義する。

以上から我々は  $T \rightarrow 0$  で exact な膨張率を得ると同時に高温領域においても  $\delta_{\text{exact}}$  と同じ傾向をもつ  $\delta$  を得た。(以上の議論の詳細及び reductive perturbation 法との比較については文献 1 を参照)

### C. Envelope ソリトンの相互作用の効果

ソリトンの相互作用の効果調べる為に (2) 式を拡張して次の展開を行う。

$$u_n = \sum_{i=1}^I \sum_{m_i=-\infty}^{\infty} \psi_m^{(i)} e^{im_i \theta_i}, \quad \theta_i = k_i x - \omega(k_i) t \quad (11)$$

このとき averaged Hamiltonian  $\bar{\mathcal{H}}$  に対して

$$\bar{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^I \bar{\mathcal{H}}(\psi_1^{(i)}) + \bar{\mathcal{H}}_{\text{interaction}} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_{\text{interaction}} = & \frac{48f}{h_0^3} [3q - 2p^2] \sum_{i \neq j} \sin^2\left(\frac{k_j h_0}{2}\right) \sin^2\left(\frac{k_j h_0}{2}\right) \\ & \times \int dx |\psi_1^{(i)}|^2 |\psi_1^{(j)}|^2 \end{aligned}$$

を得る。 $\overline{\mathcal{M}}$  interaction は Envelope ソリトンの 2 体相互作用を表わしている。B. におけると同様の手順で  $\delta$  を計算すると  $\delta_{\text{exact}}$  にみられる saturation 効果 (高温になると  $\delta$  の増加率がにぶる) が一層顕著に再現されることがわかった。

#### D. 変位-変位 相関関数

以上の envelope ソリトンの描像に基づいて格子系の変位-変位相関関数

$$S^{\text{DD}}(\kappa; \Omega) \equiv \sum_{n-n'} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\kappa[x_n - x_{n'}] + i\Omega(t-t')} \langle u_n(t) u_{n'}(t') \rangle \quad (13)$$

を求めることが出来る。

$$\Omega_p = \omega(\kappa) + \Delta \quad (\Delta > 0)$$

における peak [shifted damped phonon] と small  $\kappa, \Omega$  の領域でのみ寄与をもつ熱膨張波の伝播から生じる central part の 2 つの部分から  $S^{\text{DD}}(\kappa; \Omega)$  がなりたつ事がわかった。( § C, D の内容は Journal に発表予定。)

#### 参 考 文 献

- 1) T. Munakata and A. Igarashi; J. Phys. Soc. Japan (1984) 2月号

## 1 次元 $\phi^4$ -Soliton の Dynamics

東大・理 小 形 正 男

Krumhansl-Srieffer の論文によって、非線形 1 次元系における Soliton の統計力学上の役割が非常に重要であることが認識されて既に久しい。彼らは  $\phi^4$  系の静的及び動的性質に対する soliton (domain wall) の寄与を調べた。<sup>1)</sup>

一方、分子動力学の computer simulation により、この soliton の役割は確認された。それと同時に、soliton が Brown 運動をしていることが判った。<sup>2, 3)</sup> この Brown 運動は soliton と熱励起された phonon との間の衝突によるとして、Wada-Schrieffer によって調べられた。<sup>4)</sup> 我々は、さらに進んで、完全可積分ではない  $\phi^4$  系における soliton と phonon の間の運動量交換